



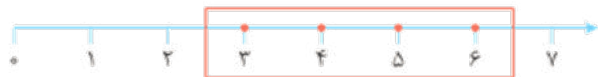
درس اول: عددهای گویا

در فصل قبل با نمایش های مختلف مجموعه های عددی از قبیل نمایش توصیفی، زبان نمادین و نمایش هندسی آشنا شدید.

نمایش توصیفی (عبارت کلامی): مجموعه عددهای طبیعی بین ۲ و ۷

نمایش با زبان نمادین: $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 < x < 7\}$ ؛ نمایش یک مجموعه با اعضایش $\{3, 4, 5, 6\}$ هم نوعی نمایش با زبان نمادین است.

نمایش هندسی:



روش های نوشتن یک کسر بین دو کسر

۱- **مخرج مشترک:** ابتدا باید بین دو کسر مخرج مشترک بگیریم، سپس یک کسر بین آنها بنویسیم. در صورتی که بعد از مخرج مشترک گیری، صورت کسرها دو عدد متوالی باشد، باید صورت و مخرج جدید را در ۲، ۳، ۴ یا... ضرب کنیم تا بتوانیم کسر وسط آنها را بنویسیم.

$$\frac{1}{2} < ? < \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{3}{6} < ? < \frac{4}{6} \xrightarrow{\times 2 \text{ صورت و مخرج هر کسر}} \frac{6}{12} < ? < \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$$

۲- **میانگین:** می دانیم که میانگین هر دو عدد متمایز در بین آنها و دقیقاً وسط آن اعداد قرار دارد.

$$\frac{1}{2} \text{ و } \frac{2}{3} \text{ میانگین } = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \div 2 = \left(\frac{3+4}{6}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$$

۳- **روش فشفتنه:** اگر صورت دو کسر را با هم و مخرج آنها را نیز با هم جمع کنیم و عددهای حاصل را به ترتیب در صورت و مخرج یک کسر قرار دهیم، کسر حاصل بین دو کسر اولیه قرار دارد.

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

با هریک از روش های بالا می توانیم بی شمار عدد بین دو عدد کسری پیدا کنیم، پس بین هر دو عدد کسری بی شمار عدد دیگر وجود دارد.

نکته

بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد، پس مجموعه عددهای گویا را نمی توان با نوشتن عضوهایش نمایش داد و برای نمایش آن از روش زبان نمادین استفاده می شود.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مقایسه عددهای گویا

برای مقایسه عددهای گویا از روش مخرج مشترک گیری استفاده می کنیم. در این روش ابتدا باید مخرج مشترک همه عددها را تعیین، سپس کسرهای حاصل را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم. دقت کنید که پس از مخرج مشترک گیری، در بین عددهای منفی عددی بزرگ تر است که صورت آن کوچک تر باشد.

$$\frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3} \xrightarrow{[7, 5, 3] = 7 \times 5 \times 3 = 105} \frac{3 \times 15}{7 \times 15}, \frac{2 \times 21}{5 \times 21}, \frac{2 \times 35}{3 \times 35} \Rightarrow \frac{45}{105}, \frac{42}{105}, \frac{70}{105} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{2}{3}$$

$$-\frac{3}{5}, -\frac{4}{7} \xrightarrow{[5, 7] = 35} -\frac{3 \times 7}{5 \times 7}, -\frac{4 \times 5}{7 \times 5} \Rightarrow -\frac{21}{35}, -\frac{20}{35} \Rightarrow -\frac{3}{5} < -\frac{4}{7}$$



دسته بندی عددهای کسری

عددهای کسری با توجه به نمایش اعشاری آنها به دو دسته تقسیم بندی می شوند:

۱- **عددهای اعشاری متناهی یا مختوم:** ابتدا صورت و مخرج کسر را تا جای ممکن **ساده** می کنیم. سپس کسرهایی که مخرج آنها شمارنده اولی به غیر از ۲ و ۵ نداشته باشد، کسرهای اعشاری متناهی یا مختوم به صفر هستند که قسمت اعشاری آنها محدود و مشخص است. برای تبدیل چنین کسرهایی به عدد اعشاری کافی است صورت و مخرج کسر را در یک عدد ضرب کنیم تا عدد مخرج به توانی از ۱۰ تبدیل شود، سپس عدد کسری را به اعشاری تبدیل می کنیم.

$$\frac{13}{5} = \frac{26}{10} = 2/6$$

$$\frac{77}{44} = \frac{7}{4} = \frac{175}{100} = 1/75$$

۲- **عددهای اعشاری متناوب:** ابتدا صورت و مخرج کسر را تا جای ممکن **ساده** می کنیم. مخرج این گونه کسرها پس از ساده کردن کسر، بر عددهای دیگری نیز مانند ۳، ۵، ۷ و... بخش پذیر هستند، پس با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن هیچ گاه باقیمانده صفر نمی شود و قسمت اعشاری آنها انتها ندارد. همچنین در قسمت اعشاری آنها، یک یا چند رقم به صورت متناوب تکرار می شوند. برای مثال $\frac{5}{3}$ برابر $1/666666000$ است که برای نمایش خلاصه تر، آن را به صورت $1/6$ می نویسیم.

$$\frac{5}{3} \approx 1/66666000 = 1/6$$

$$\frac{14}{12} = \frac{7}{6} \approx 1/166666000 = 1/16$$

حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $1/3 + 3/4 = 1/3333... + 3/4444... = 4/7777... = 4/7$

ب) $2/25 + 2/25 = 2/255555... + 2/253333... = 4/709090... = 4/709$

مثال

نکته

۱- اگر a عددی یک رقمی باشد، آنگاه:

$$\frac{a}{9} = 0/aaa... = 0/a$$

$$\frac{5}{9} = 0/5555... = 0/5$$

$$\frac{2}{9} = 0/222... = 0/2$$

مانند:

۲- اگر عدد ab معرف یک عدد دو رقمی باشد، آنگاه:

$$\frac{ab}{99} = 0/ababab... = 0/ab$$

$$\frac{26}{99} = 0/262626... = 0/26$$

$$\frac{7}{99} = 0/070707... = 0/7$$

مانند:

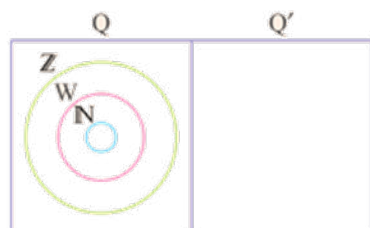
درس دوم: عددهای حقیقی

آشنایی با عددهای گنگ: به عددهایی مانند $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ که مقدار دقیق آنها مشخص نیست و همچنین قسمت اعشاری آنها نامتناهی است و دوره تناوب ندارد، مجموعه اعداد گنگ یا اصم می‌گویند. این مجموعه را با نماد Q' یا Q^c نمایش می‌دهند.

نکته

۱- عدد $\pi = 3/14159265358\ldots$ که در محاسبه محیط و مساحت دایره به کار می‌رود، یک عدد گنگ است.

۲- اعدادی مانند $0/1010010001000010000\ldots$ یا $0/1211211121112\ldots$ نیز عدد گنگ هستند، زیرا دوره تناوب ندارند.



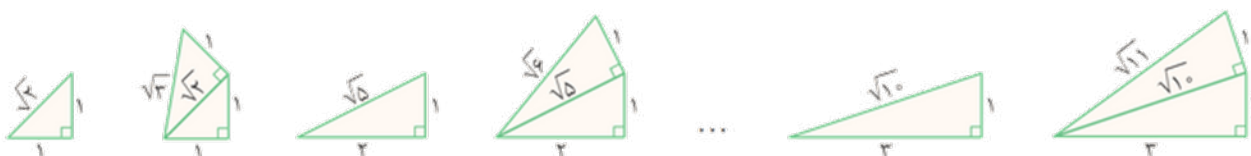
۳- اگر عدد زیر یک رادیکال مجذور کامل نباشد، آن عدد رادیکالی گنگ است. نمودار ون مقابل با توجه به مجموعه‌های عددی مهم مانند اعداد طبیعی (N)، اعداد حسابی (W)، اعداد صحیح (Z)، اعداد گویا (Q) و اعداد گنگ (Q') رسم شده است.

مثال $\sqrt{19}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

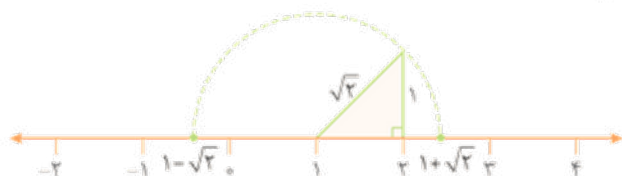
برای پاسخ به این سؤال ابتدا عددهای مجذور کامل قبل و بعد از ۱۹ را مشخص می‌کنیم که عددهای ۱۶ و ۲۵ هستند؛ بنابراین:

$$16 < 19 < 25 \Rightarrow \sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{19} < 5$$

نمایش عددهای گنگ روی محور اعداد: روی محور اعداد نقاطی وجود دارد که هیچ‌کدام از آنها متعلق به مجموعه اعداد گویا نیست، مانند $\sqrt{2}$ که برای نمایش این‌گونه عددهای رادیکالی روی محور اعداد می‌توانیم از مثلث‌های قائم‌الزاویه زیر کمک بگیریم.



مثال عددهای $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ را روی محور نمایش دهید.



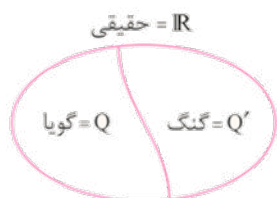
ابتدا مثلثی را که وتر آن $\sqrt{2}$ است، روی محور اعداد رسم می‌کنیم به طوری که یک زاویه تند آن روی نقطه ۱ و زاویه قائمه‌اش نیز روی نقطه ۲

قرار گیرد (مانند شکل)، سپس دهانه پرگار را به اندازه وتر مثلث (یعنی $\sqrt{2}$) باز می‌کنیم و به مرکز نقطه ۱ و به همان شعاع (وتر مثلث قائم‌الزاویه) کمائی می‌زنیم. اگر کمان، محور را در جهت مثبت آن قطع کند، نقطه حاصل $1+\sqrt{2}$ است و اگر کمان محور را در جهت منفی آن قطع کند، نقطه حاصل $1-\sqrt{2}$ است.

مثال

چهار عدد گنگ بین $\sqrt{6}$ و $\sqrt{8}$ بنویسید.

بین ۶ و ۸ اعدادی مانند $\frac{6}{1}$ ، $\frac{6}{35}$ ، $\frac{7}{5}$ و $\frac{7}{5}$ را در نظر می‌گیریم که مربع کامل نیستند. در این صورت جذر آنها یعنی $\sqrt{\frac{6}{1}}$ ، $\sqrt{\frac{6}{35}}$ ، $\sqrt{7}$ و $\sqrt{\frac{7}{5}}$ عدد گنگ خواهند بود.



اعداد حقیقی: به اجتماع دو مجموعه اعداد گویا (Q) و اعداد گنگ (Q')، مجموعه اعداد حقیقی

$$\mathbb{R} = Q \cup Q'$$

می‌گویند و آن را با (IR) نشان می‌دهند.

$$\mathbb{R} - Q = Q', \mathbb{R} - Q' = Q$$

با توجه به تعریف تفاضل در مجموعه داریم:

با توجه به اینکه بین هر دو عدد گویا یا هر دو عدد گنگ بی‌شمار عدد دیگر وجود دارد، پس مجموعه اعداد حقیقی را نمی‌توان با عضوهایش نشان داد و برای نمایش آن باید از نمایش به روش زبان نمادین یا نمایش هندسی (محور) استفاده کنیم.

مثال

مجموعه‌های زیر را با زبان نمادین و روش هندسی نمایش دهید.

الف) مجموعه اعداد حقیقی بین -۲ و +۳:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < +3\}$$

روش زبان نمادین:



روش هندسی:

ب) مجموعه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی +۳ و بزرگ‌تر از -۲:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq +3\}$$

روش زبان نمادین:



روش هندسی:

توجه: توخالی بودن دایره‌ها در محور قسمت (الف) به این معنی است که دو عدد -۲ و +۳ عضو مجموعه نیستند و توپر بودن دایره روی عدد ۳ در محور قسمت (ب) به این معنی است که عدد +۳ نیز عضو مجموعه است.



درس سوم: قدر مطلق و محاسبه تقریبی

قدر مطلق: به فاصله نقطه نمایش عدد a از مبدأ، قدر مطلق a می‌گویند و آن را با نماد $|a|$ (می‌خوانیم قدر مطلق a) نمایش می‌دهند.

برای مثال در محور زیر فاصله دو نقطه ۳ و -۳ تا مبدأ برابر ۳ واحد است، پس قدر مطلق هر دو عدد ۳ و -۳ برابر ۳ است، یعنی:

$$|3| = |-3| = 3$$

همچنین فاصله نقاط نظیر دو عدد $\frac{3}{4}$ و $-\frac{3}{4}$ تا مبدأ برابر $\frac{3}{4}$ است، پس قدر مطلق هر دو عدد $\frac{3}{4}$ و $-\frac{3}{4}$ برابر $\frac{3}{4}$ است، یعنی:

$$|\frac{3}{4}| = |-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$$



نکته

۱- قدر مطلق صفر برابر صفر است.

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

۲- قدر مطلق هر عدد حقیقی مثبت برابر همان عدد است.

$$a \in \mathbb{R}, a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

۳- قدر مطلق هر عدد حقیقی منفی برابر قرینه آن عدد است.

$$a \in \mathbb{R}, a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

برای محاسبه حاصل عبارت‌هایی که قدر مطلق دارند، ابتدا حاصل عبارت داخل قدر مطلق را با توجه به ترتیب انجام عملیات ریاضی به دست می‌آوریم و در آخر، قدر مطلق جواب را تعیین می‌کنیم.

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

مثال

$$\text{الف) } |-30 + \overbrace{10 \times 2}^{20}| = |-30 + 20| = |-10| = 10$$

$$\text{ب) } |8 - \overbrace{5 \times 3}^{15} + 13| = |8 - 15 + 13| = |-7 + 13| = |6| = 6$$

نکته

۱- برای دو عدد حقیقی نامنفی، حاصل ضرب و حاصل جمع همواره عددی نامنفی است.

$$a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ a + b \geq 0 \end{cases}$$

۲- برای دو عدد حقیقی نامثبت، حاصل ضرب همواره نامنفی و حاصل جمع همواره نامثبت است.

$$a \leq 0, b \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ a + b \leq 0 \end{cases}$$

۳- قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد برابر حاصل ضرب قدر مطلق آنهاست.

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$|-3 \times 5| = |-3| \times |5| = 3 \times 5 = 15$$

مانند:

۴- قدر مطلق مجموع دو عدد کوچک‌تر یا مساوی با مجموع قدر مطلق آن دو عدد است.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|5 + 7| = |5| + |7| = 5 + 7 = 12$$

$$| \underbrace{-5 + 7}_{+2} | < |-5| + |7| = 5 + 7 = 12$$

مانند:

$$|+2| = 2$$

برای محاسبه حاصل عبارت‌هایی مانند $|a + \sqrt{b}|$ و $|\sqrt{a} - b|$ ابتدا باید مقدار هر یک از رادیکال‌ها را تا یک رقم اعشار محاسبه کنیم، سپس با جایگذاری آن در عبارت داخل قدر مطلق، مقدار تقریبی و در نتیجه علامت عدد حاصل را تعیین کنیم. در صورتی که حاصل عددی مثبت شود، جواب برابر عبارت داخل قدر مطلق است، اما اگر حاصل عددی منفی شود، جواب برابر قرینه عبارت داخل قدر مطلق است.

مثال

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $|\underbrace{2 + \sqrt{3}}_{\text{مثبت}}| = 2 + \sqrt{3}$ مجموع دو عدد مثبت، مانند $\sqrt{3}$ و ۲، همواره عددی مثبت است.

ب) $|\underbrace{\sqrt{3} - 2}_{\text{منفی}}| = -(\sqrt{3} - 2) = -\sqrt{3} + 2 = 2 - \sqrt{3}$ با توجه به اینکه $\sqrt{3} \approx 1/7$ ، آنگاه $\sqrt{3} - 2 \approx -0/3$ ، یعنی عدد داخل قدرمطلق منفی است.

پ) $|\underbrace{1 - 2\sqrt{5}}_{\text{منفی}}| = -(1 - 2\sqrt{5}) = -1 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 1$

نکته

$\sqrt{a^2} = |a|$ جذر مجذور یک عدد برابر است با قدرمطلق همان عدد یعنی:

$\sqrt{7^2} = |7| = 7$ ، $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ مانند:

مثال

۱- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = |\underbrace{\sqrt{5} - 1}_{\text{مثبت}}| = \sqrt{5} - 1$

ب) $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} = |\underbrace{3 - \sqrt{10}}_{\text{منفی}}| = -(3 - \sqrt{10}) = -3 + \sqrt{10} = \sqrt{10} - 3$ با توجه به اینکه $\sqrt{10} \approx 3/1$ ، حاصل $3 - \sqrt{10}$ عددی منفی است.

پ) $\sqrt{(5\sqrt{2} - 8\sqrt{2})^2} = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2} = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

۲- اگر $a = \frac{3}{2}$ ، $b = 2$ و $c = -\sqrt{2}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{(a - b + 2c)^2}$ را به دست آورید.

$\sqrt{(a - b + 2c)^2} = |a - b + 2c| = |\underbrace{\frac{3}{2} - 2 + 2(-\sqrt{2})}_{-\frac{1}{2}}| = |-\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}| = -(-\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$