



درس اول: معرفی مجموعه

تعریف مجموعه: به دسته‌ای از اعداد، اشیا، حروف یا اشکال که دوه‌دو متمایز و کاملاً مشخص باشند، مجموعه می‌گوییم. برای مثال مجموعه عددهای طبیعی یک‌رقمی عبارت است از: ۱، ۲، ۳، ... و ۹ که اگر آنها را داخل دو آکولاد قرار دهیم و آن را با حروفی مانند A، B یا... نام‌گذاری کنیم، در این صورت یک مجموعه تشکیل داده‌ایم.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

به هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳، ... و ۹ که در مجموعه A قرار دارند یک **عضو** مجموعه A گفته می‌شود. چون از ۱ تا ۹، نه عدد طبیعی وجود دارد، این مجموعه دارای ۹ عضو است.

نکته

در تعریف مجموعه:

- منظور از عبارت **دوه‌دو متمایز** این است که تکرار در مجموعه اثر ندارد؛ یعنی اگر در مجموعه A، چند مرتبه عدد ۲ نوشته شود، باید عضوهای تکراری را حذف کنیم و فقط یک عضو ۲ را بنویسیم.
- منظور از عبارت **کاملاً مشخص** این است که عضوهای مجموعه به طور **سلیقه‌ای** انتخاب نشوند و عضو مجموعه منحصر به فرد باشد؛ بنابراین نمی‌توان مجموعه‌ای با عنوان «سه شاعر معروف» تشکیل داد، چون هر کسی به طور سلیقه‌ای شاعران معروف را مشخص می‌کند؛ شاید یک فرد از حافظ، سعدی و فردوسی نام ببرد، اما فردی دیگر از حافظ، نظامی و خیام و فرد سوم از مولوی، عطار و فردوسی.

در نوشتن و نمایش مجموعه‌ها، جابه‌جایی اعضای مجموعه اهمیت ندارد؛ به این معنی که با جابه‌جا کردن اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی‌شود. برای مثال مجموعه‌های $\{1, 5, a\}$ ، $\{a, 1, 5\}$ و $\{5, a, 1\}$ هیچ تفاوتی ندارند.

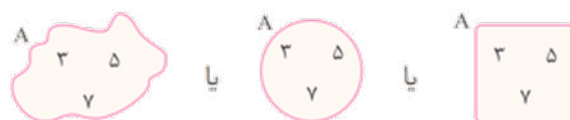
هر یک از عوامل تشکیل‌دهنده یک مجموعه را عضو آن مجموعه می‌گوییم. برای نمایش عضویت یا تعلق داشتن از نماد $\in$ و برای نمایش عدم عضویت از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم. برای مثال در مجموعه $D = \{1, 5, a\}$ می‌توانیم عضویت هر یک از اعضای مجموعه را به این صورت نمایش دهیم:

$5 \in D$ (۵ عضو مجموعه D است.) $a \in D$ (a عضو مجموعه D است.) $1 \in D$ (۱ عضو مجموعه D است.)

همچنین با توجه به اینکه ۳ عضو این مجموعه نیست، می‌نویسیم $3 \notin D$ و می‌خوانیم: ۳ عضو مجموعه D نیست.

تذکر: دقت کنید که در مجموعه $E = \{2, \{7\}, 3\}$ ، ۷ عضو مجموعه E نیست، بلکه $\{7\}$ عضو مجموعه E است؛ یعنی در این مجموعه $\{7\} \in E$ و $7 \notin E$. همچنین $2 \in E$ و $\{2\} \notin E$ ؛ یعنی همان چیزی که عیناً درون مجموعه می‌بینیم، عضو آن است.

نمودار ون: می‌توانیم اعضای یک مجموعه را داخل یک منحنی یا شکل بسته به صورت زیر نشان دهیم.



به این نوع نمایش مجموعه‌ها، نمایش با استفاده از **نمودار ون** می‌گویند.

نکته

- ۱- اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن مجموعه را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم. برای مثال مجموعه اعداد اول دو رقمی زوج یا مجموعه اعداد طبیعی بین $7/2$ و $7/5$ هیچ عضوی ندارد و هر کدام یک مجموعه تهی است.
- ۲- مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ ، $\{\}$ و $\{\{\}\}$ تهی نیستند، بلکه یک عضو اند و عضوهای آنها به ترتیب $\emptyset$ ، $\emptyset$ و $\{\}$ است.



درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه برابر: دو مجموعه A و B را برابر گویند هرگاه عضوهای دو مجموعه یکسان باشد؛ یعنی هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر هر عضوی که در یکی از مجموعه‌ها می‌بینیم، در دیگری هم ببینیم. تساوی دو مجموعه A و B را با نماد ریاضی به صورت $A = B$ نشان می‌دهیم.

اگر $A = B$ ، $A = \{5\}$ و $B = \{a, b - 3\}$ باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

چون دو مجموعه A و B برابر هستند، مجموعه B نیز باید یک عضو داشته باشد، یعنی هر دو عضو B باید مساوی ۵ باشند؛ بنابراین:

$$a = 5, \quad b - 3 = 5 \Rightarrow b = 5 + 3 = 8$$

نکته

- ۱- همه مجموعه‌های تهی با یکدیگر برابر هستند.
- ۲- عددهای $\sqrt{16}$ ، $\frac{12}{3}$ و 2^2 نمایش‌های مختلفی از عدد ۴ هستند، پس با یکدیگر برابرند؛ بنابراین باید در مجموعه‌ها به نمایش مختلف اعداد دقت، و عضوهای تکراری را حذف کرد.

زیرمجموعه: مجموعه A را زیرمجموعه B گویند، هرگاه هر عضوی از A یک عضو از B باشد و می‌نویسیم $A \subseteq B$. برای مثال $A = \{1, 9, 4\}$ زیرمجموعه $B = \{-1, 1, 6, 9, 4, 7\}$ است؛ زیرا همه عضوهای مجموعه A حتماً عضوی از مجموعه B هستند؛ ولی مجموعه $C = \{-1, 6, 11\}$ زیرمجموعه B نیست، چون در مجموعه C عضوی مانند ۱۱ وجود دارد که عضو مجموعه B نیست ($C \not\subseteq B$).

نکته

- ۱- اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعه A نیست و می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.
- مانند: $\{\{3\}\} \subseteq \{2, \{3\}, \{3, 5\}\}$ و $\{2, \{5\}, 7\} \not\subseteq \{2, 5, 7, 8\}$
- ۲- هر مجموعه زیرمجموعه خودش است و برای هر مجموعه دلخواه مانند A داریم $A \subseteq A$.
- مانند: $\emptyset \subseteq \emptyset$ و $\{2, 6\} \subseteq \{2, 6\}$ و $\{1, 5, \{7\}\} \subseteq \{1, 5, \{7\}\}$
- ۳- مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است، یعنی $\emptyset \subseteq A$.
- مانند: $\emptyset \subseteq \{1, 5\}$ و $\emptyset \subseteq \{2, -9, a\}$ و $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3, \dots\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد:

مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

چون در مجموعه اعداد گویا، بین هر دو عضو دلخواه بی‌شمار عضو دیگر وجود دارد، نمی‌توان این مجموعه را با عضوهایش نشان داد و برای نمایش آن باید از نمادهای ریاضی استفاده کرد.

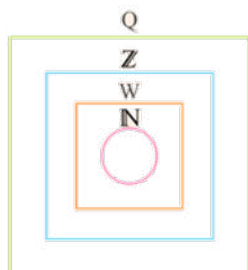
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا



نکته

با توجه به تعریف زیر مجموعه داریم:



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}, \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

بنابراین:

مثال

۱- مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نشان دهید.

الف) $A = \{3, 6, 9, 12, \dots, 45\}$

همه اعضای این مجموعه مضرب‌های ۳ هستند، یعنی هر عضو مجموعه از رابطه $3k$ ساخته می‌شود به طوری که k عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۵ باشد.

$$A = \{3 \times \textcircled{1}, 3 \times \textcircled{2}, 3 \times \textcircled{3}, 3 \times \textcircled{4}, \dots, 3 \times \textcircled{15}\} = \{3k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 15\}$$

ب) $B = \{5, 8, 11, 14, \dots\}$

در این مجموعه، عضوها مضرب یک عدد ثابت نیستند اما فاصله همه آنها از هم ۳ واحد است؛ پس می‌توانیم هر عضو این مجموعه را مضرب‌های طبیعی ۳ که ۲ واحد به آنها اضافه شده در نظر بگیریم، یعنی هر عضو مجموعه از رابطه $3k + 2$ ساخته می‌شود به طوری که k عدد طبیعی باشد.

$$B = \{3 \times \textcircled{1} + 2, 3 \times \textcircled{2} + 2, 3 \times \textcircled{3} + 2, 3 \times \textcircled{4} + 2, \dots\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

۲- مجموعه $F = \{4x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 7\}$ را با اعضایش نمایش دهید.

در این مجموعه شرط اول ($x \in \mathbb{Z}$) مشخص می‌کند که باید x ها را از اعداد صحیح انتخاب کنیم و شرط دوم ($-3 < x \leq 7$) مشخص می‌کند اعدادی که انتخاب می‌کنیم، یعنی x ها، باید از -2 تا خود 7 باشند (دقت کنید که $x \leq 7$ یعنی اعداد کوچک‌تر یا مساوی ۷ اما $-3 < x$ یعنی اعداد بزرگ‌تر از -3). حالا اعداد صحیح از -2 تا 7 را در رابطه $4x - 5$ جایگذاری می‌کنیم تا عضوهای مجموعه F مشخص شوند.

$$F = \{\underbrace{4(-2) - 5}_{-17}, \underbrace{4(-1) - 5}_{-9}, \underbrace{4(0) - 5}_{-5}, \dots, \underbrace{4(7) - 5}_{23}\} = \{-17, -9, -5, \dots, 23\}$$

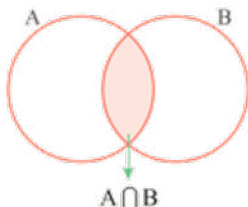


درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اشتراک دو مجموعه: به مجموعه‌ای که شامل همهٔ عضوهای مشترک دو مجموعه A و B باشد، اشتراک این دو مجموعه می‌گویند و

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

آن را با نماد ریاضی $A \cap B$ نشان می‌دهند؛ بنابراین:



در نمودارِ وِن مقابل، قسمت رنگ‌شده اشتراک دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد:

$$\{2, 4, 6, 8\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 6\}$$

مانند:

نکته

۱- اشتراک هر مجموعه‌ای با خودش برابر با همان مجموعه است.

۲- اشتراک دو مجموعه A و B ، هم زیرمجموعه A و هم زیرمجموعه B است، یعنی:

۳- مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است؛ بنابراین تهی زیرمجموعه اشتراک هر دو مجموعه مانند A و B است، یعنی:

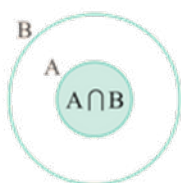
$$\emptyset \subseteq A \cap B$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

۴- اشتراک هر مجموعه‌ای با مجموعه تهی برابر با مجموعه تهی است.

$$\{3, 10, 15\} \cap \{\} = \{\} = \emptyset$$

مانند:



۵- اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه اشتراک آنها برابر با مجموعه کوچک‌تر یعنی A است.

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

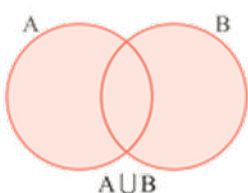
$$\{a, b, c\} \cap \{a, c\} = \{a, c\}$$

مانند:

اجتماع دو مجموعه: به مجموعه‌ای که شامل همهٔ عضوهای دو مجموعه A و B باشد، اجتماع این دو مجموعه می‌گویند و آن را با

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

نماد ریاضی $A \cup B$ نشان می‌دهند؛ بنابراین:



پس تک‌تک عضوهای $A \cup B$ حداقل در یکی از دو مجموعه A و B قرار دارد.

در نمودارِ وِن مقابل، قسمت رنگ‌شده اجتماع دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد:

$$\{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

مانند:

نکته

۱- اجتماع هر مجموعه‌ای با خودش برابر با همان مجموعه است.

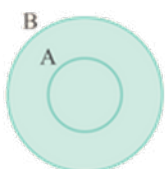
۲- هر مجموعه‌ای زیرمجموعه اجتماع اجتماع با مجموعه‌های دیگر است.

۳- اجتماع هر مجموعه‌ای با مجموعه تهی برابر با همان مجموعه است.

$$\{3, 10, 15\} \cup \{\} = \{3, 10, 15\}$$

مانند:

۴- اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه اجتماع آنها برابر با مجموعه بزرگ‌تر یعنی B است.



$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$\{a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$$

مانند:

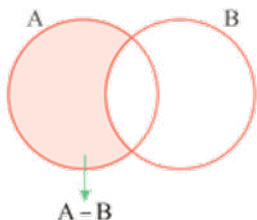


تفاضل دو مجموعه: به مجموعه‌ای که شامل همهٔ عضوهای مجموعهٔ A باشد ولی هیچ‌یک از عضوهای مجموعهٔ B را نداشته باشد،

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

تفاضل B از A می‌گویند و آن را با نماد ریاضی $A - B$ نشان می‌دهند.

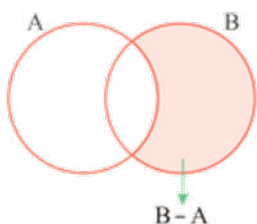
در نمودار ون مقابل، قسمت رنگ‌شده $A - B$ را نشان می‌دهد:



$$\{2, 4, 6, 8\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 8\}$$

مانند:

دقت کنید که $A - B$ و $B - A$ با یکدیگر برابر نیستند.



$$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$$

$$\{3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{3, 5, 7\}$$

مانند:

نکته

تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال اگر A دارای k عضو باشد، می‌نویسیم: $n(A) = k$

$$B = \{2, 7, 17, 22\} \Rightarrow n(B) = 4$$

مانند:

اگر $A = \{5, 11, 1, 6, -4, 7\}$ و $B = \{-5, 2, 7, 6, 4\}$ باشد، هر یک از مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$

و $A - B$ را بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را مشخص کنید.

$$A \cap B = \{7, 6\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{5, 11, 1, 6, -4, 7, -5, 2, 4\} \Rightarrow n(A \cup B) = 9$$

$$A - B = \{5, 11, 1, -4\} \Rightarrow n(A - B) = 4$$

$$B - A = \{-5, 2, 4\} \Rightarrow n(B - A) = 3$$

نکته

$$A - A = \emptyset$$

۱- تفاضل هر مجموعه از خودش برابر با مجموعهٔ تهی است.

$$A - \emptyset = A$$

۲- تفاضل مجموعهٔ تهی از هر مجموعه برابر با آن مجموعه است.

$$A - B \subseteq A \quad B - A \subseteq B$$

۳- مجموعهٔ $A - B$ زیرمجموعهٔ A و مجموعهٔ $B - A$ زیرمجموعهٔ B است.

$$\emptyset - A = \emptyset$$

۴- تفاضل هر مجموعه از مجموعهٔ تهی برابر با مجموعهٔ تهی است.



درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

مجموعه‌ها و احتمال: در سال‌های قبل آموختید که اگر درباره رخ دادن یا رخ ندادن یک اتفاق (پیشامد) مطمئن نباشیم، آن را با یک کسر کوچک‌تر از واحد (یعنی کسری بین صفر و ۱) نشان می‌دهیم. به طور کلی برای محاسبه احتمال رخ دادن یک پیشامد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

اگر مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را S ، مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را A و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، این احتمال از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ به دست می‌آید. توجه کنید که همواره مجموعه A زیرمجموعه‌ای از مجموعه S است.

نکته

به هر یک از زیرمجموعه‌های مجموعه S ، یک پیشامد تصادفی می‌گویند.

مثال

تاسی را می‌اندازیم.

الف) مجموعه S را تشکیل دهید و تعداد عضوهای آن را مشخص کنید.

در پرتاب هر تاس، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ ظاهر می‌شود؛ بنابراین:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

ب) احتمال اینکه عدد روشده شمارنده ۴ باشد، چقدر است؟

پیشامد مطلوب یعنی رو شدن شمارنده‌های ۴ را A می‌نامیم و مجموعه A را می‌نویسیم.

$$A = \{4\} \Rightarrow n(A) = 1 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

پ) احتمال اینکه عدد روشده مرکب باشد، چقدر است؟

پیشامد مطلوب یعنی رو شدن عدد مرکب را B می‌نامیم و مجموعه B را می‌نویسیم.

$$B = \{4, 6\} \Rightarrow n(B) = 2 \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ت) احتمال اینکه عدد روشده دو رقمی باشد، چقدر است؟

پیشامد مطلوب یعنی رو شدن عدد دو رقمی را C می‌نامیم و مجموعه C را می‌نویسیم.

$$C = \{\} = \emptyset \Rightarrow n(C) = n(\emptyset) = 0 \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

ث) احتمال اینکه عدد روشده یک رقمی باشد، چقدر است؟

پیشامد مطلوب یعنی رو شدن عدد یک رقمی را D می‌نامیم و مجموعه D را می‌نویسیم. فقط دقت کنید که مجموعه حالت‌های مطلوب حتماً باید زیرمجموعه S باشد.

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(D) = n(S) = 6 \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$